La Función Parte Entera

José Pablo Flores Zúñiga

Ilustración hecha por: Dorian Román Pérez

ÍNDICE

Página

Objetivos…………………………………………………………….. 3

Introducción…………………………………………….......... 4

Motivación histórica……………………………..………… 4

1.1 Definición de parte entera……………………….......... 5

Ejercicios 1.1 ………………………………………………….. 7

1.2 Orden de los números reales ………………………... 8

Ejercicios 1.2 ………………………………………………….. 9

1.3 Análisis de la función parte entera…………………. 10

Ejercicios 1.3 ………………………………………………….. 10

Ejercicios de mayor grado dificultad……………………... 12

Respuesta de los ejercicios…………………………........ 13

Función Parte Entera

Objetivos

$$[\![x]\!]$$

- Conocer la función parte entera
- Determinar imágenes de números reales en la función parte entera
- Caracterizar la función parte entera
- Determinar la propiedad de densidad de números reales

"Si quieres triunfar, debes abrir nuevos caminos en vez de avanzar por los trillados senderos por donde siempre has pasado"

John D. Rockefeller

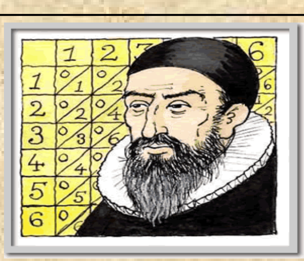
Introducción

Analicemos la imagen de la portada ¿En algún momento de su vida usted ha tenido exactamente 5π años, o $\sqrt{101}$ años?

Patrick, un estudiante que nació el 12 mayo de 1994 le preguntó su compañera Melissa ¿qué edad tienes? (Ella le preguntó el día 4 abril de 2010) Si hacemos los cálculos de la edad, Patrick tiene 15,89589 años; sin embargo Patrick le responde a Melissa tengo 15 años.

- **Actividad**: Pregúntele a la persona más cercana ¿Qué edad tienes?

Motivación Histórica



En 1616, en la traducción al inglés de una obra del escocés John Napier (1550-1617), las fracciones decimales aparecen tal como las escribimos hoy, con coma decimal para separar la parte entera de la fraccionaria. Napier propuso un punto o una coma como signo de separación decimal: el punto decimal se consagró en países anglosajones, pero en muchos otros países, se continúa utilizando la coma decimal.[1]

En la historia de las matemáticas se le da créditos al matemático suizo Leonhard Euler por precisar el concepto de función, así como por realizar un estudio sistemático de todas las funciones elementales; sin embargo, el concepto mismo de función nació con las primeras relaciones observadas entre dos variables, hecho que surgió desde los inicios de la matemática en la humanidad, con civilizaciones como la griega, la babilónica, la egipcia y la china.[2]

Referencias
[1] http://sites.google.com/a/glm.edu.co/matematicas-2009-200/sexto-profundizacion-/tareas/ii-bimestre
[2] http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/AportesPe/Externos/fcuadraticas/paginas/historia.htm

1.1 Definición de Parte Entera

Sea $f, f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ entonces f se llama función parte entera denotada por: $f(x) = [\![x]\!]$ donde $[\![x]\!] = máx\{z \in \mathbb{Z} / z \leq x\}$

Ejemplos:

a) Calculemos la parte entera para el número π

Recordemos que π es un número irracional y su aproximación es:

$$\pi \approx 3{,}14159265358979323846 \ldots$$

De la definición de parte entera buscamos un número entero menor que π, algunos enteros menores:

$$-3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < \pi$$

¿Cuál es el máximo de esos enteros (el mayor entero)?

El mayor entero es 3

Entonces $[\![\pi]\!] = 3$.

b) Calculemos $\left[\!\!\left[\frac{9}{2}\right]\!\!\right]$

Observe que $\frac{9}{2} = 4{,}5$ algunos enteros menores que 4,5

$2 < 3 < 4 < 4{,}5$

El mayor entero menor que 4,5 es 4

$$\left[\!\!\left[\frac{9}{2}\right]\!\!\right] = 4$$

c) Calculemos $[\![2]\!]$

Algunos enteros menores o iguales a 2

$-1 < 0 < 1 < 2 \leq 2$ El mayor entero es 2

$[\![2]\!] = 2$

d) Ahora $\left[\!\!\left[\frac{2}{3}\right]\!\!\right]$ observe que $\frac{2}{3} = 0{,}6666666 \ldots$

Algunos enteros menores o iguales $-2 < -1 < 0 < 0{,}666 \ldots$

Entonces $\left[\!\!\left[\frac{2}{3}\right]\!\!\right] = 0$

Observemos que si el **número es positivo** la parte entera, es el número entero que lo separa la coma decimal

14563,26548
Parte entera parte decimal

e) $[\![14563{,}26548]\!] = 14563$

Ahora veamos que pasa con números negativos

f) Calculemos $[\![-\sqrt{35}]\!]$

Con ayuda de una calculadora o de tablas

$$-\sqrt{35} = -5{,}916079783\ldots$$

Algunos enteros menores que $-\sqrt{35}$

$$-8 < -7 < -6 < -5{,}9160\ldots$$

Note que $[\![-\sqrt{35}]\!] \neq -5$ si no $[\![-\sqrt{35}]\!] = -6$

g) Ahora $[\![sen(240°)]\!]$

Con ayuda de una calculadora, tablas o triángulos observe que
$sen(240°) \approx -0{,}8660254\ldots$
Algunos enteros menores que $sen(240°)$
$-3 < -2 < -1 < -0{,}8660254\ldots$
$[\![sen(240°)]\!] = -1$

h) Finalmente calculemos $[\![-7]\!]$

Algunos enteros menores o iguales a -7
$-9 < -8 < -7 \leq -7$
$[\![-7]\!] = -7$

Nota:
Si el número es entero, la parte entera es el mismo número

$[\![2]\!] = 2$
$[\![0]\!] = 0$
$[\![-7]\!] = -7$

Ejercicios 1.1

Calcule la parte entera de los siguientes números

i) 5

ii) -6

iii) $\sqrt{101}$

iv) 5π

v) $\tan(80°)$

vi) $\sqrt[3]{-27}$

vii) $\sqrt[3]{45}$

viii) $-\sqrt{2}$

ix) $-0,999\ldots$

x) $\cos(100°)$

xi) 2^{-3}

xii) -3^5

xiii) -7^{-2}

xiv) e

xv) e^e

xvi) $\ln 10$

xvii) $\log e$

xviii) $-\log_3 56$

1.2 Orden de los números reales

Ahora veamos una aplicación de la función parte entera

Recordemos que una de las propiedades de los números reales es el ordenamiento, por lo que podemos comparar si un número es mayor, menor o igual que otro número real y lo podemos analizar rápidamente si calculamos la parte entera de los números a comparar.

Por ejemplo ordenemos los números $\frac{4\pi}{3}$, $\cos 30°$, $\sqrt{2}$ ascendentemente.
Primero calculamos la parte entera de los números:

$\left[\!\left[\frac{4\pi}{3}\right]\!\right] = 4$

$[\![cos 30°]\!] = 0$

$[\![\sqrt{2}]\!] = 1$

Ahora podemos ver más fácil quien es mayor y menor, recordemos que ascendentemente va ordenado de menor a mayor:
$0 < 1 < 4$
Así entonces ordenamos:
$\cos 30° < \sqrt{2} < \frac{4\pi}{3}$

Ahora otro ejemplo: ordenemos los números: $sen 210°, -\sqrt{3}, 0$
Calculemos las partes enteras de cada uno

$[\![sen 210°]\!] = -1$

$[\![-\sqrt{3}]\!] = -2$

$[\![0]\!] = 0$

Por lo que $-2 < -1 < 0$ y así ordenamos $-\sqrt{3} < sen 210° < 0$

¿Qué pasa si la parte entera es el mismo valor?

Comparemos $2\sqrt{3}$ y π
Si calculamos la parte entera
$[\![2\sqrt{3}]\!] = 3$ y $[\![\pi]\!] = 3$ las partes enteras son el mismo valor 3, pero no significa que los números son iguales, para comparar los números habría que comparar la parte decimal de los mismos.

$2\sqrt{3} \approx 3{,}4641 \ldots$ y vimos que $\pi \approx 3{,}1415 \ldots$ como $1415 < 4641$ entonces $\pi < 2\sqrt{3}$

Pero la idea es trabajar con la parte entera por lo que no se resolverán más casos de este tipo en este manual.

Ejercicios 1.2

Coloque el símbolo de mayor, menor o igual según corresponda

a) $\sqrt{5}$_______$\sqrt{10}$

b) $\frac{5}{4}$________$\frac{3}{8}$

c) e^2______2π

d) $\sqrt[3]{9}$_____$\sqrt{9}$

e) $(-\sqrt[2]{80})$____$(-\sqrt[3]{60})$

f) $cos 30°$_____$\frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $(-\frac{1}{2})$_______$(-\frac{5}{4})$

h) $\log_2 5$ ______ $\ln 4$

i) $\log 1$ _______ $\log \frac{1}{10}$

j) 2^5________3^3

1.3 Análisis de la función Parte Entera

Repase primero la definición de la Función Parte Entera

- **Actividad**: Determine el dominio y ámbito de la función parte entera y luego construya la gráfica ayudándose con una tabla de valores.

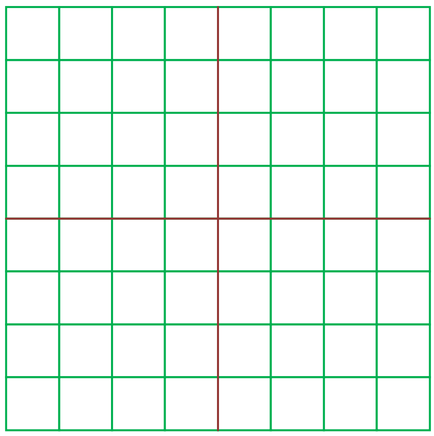
Ejercicios 1.3
Complete lo indicado a continuación

Dominio: ________
Ámbito: _________

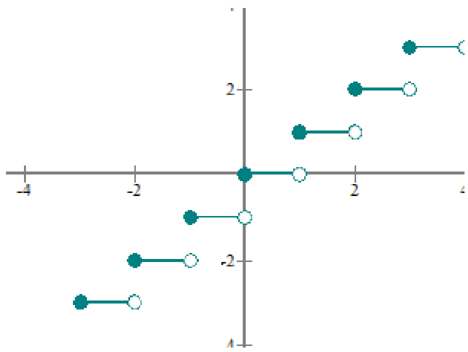
Tabla de valores

x	$f(x)$
$-5 \leq x < -4$	-5
	-4
$-3 \leq x < -2$	
	-2
$-1 \leq x < 0$	
$0 \leq x < 1$	
$1 \leq x < 2$	1
$2 \leq x < 3$	
$3 \leq x < 4$	
$4 \leq x < 5$	
	5

Gráfica



Compare la gráfica hecha con la siguiente:



Con base en la gráfica, determine o complete

a) Intersección con el eje de las abscisas: ___________

b) Intersección con el eje de las ordenadas: ___________

c) Indique tres preimágenes de 2: ____________________

d) Indique tres preimágenes de -1: ___________________

e) ¿Existen preimágenes de $\sqrt{2}$? _________ ¿por qué?

____

f) ¿Cuántas preimágenes tiene 3, compare este resultado para cualquier otra imagen? Vea la tabla de valores, ¿cómo se llama la propiedad de los números reales que generaliza esta observación?

Marque con una x dentro de la casilla si la función parte entera es o no es Inyectiva, Sobreyectiva o Biyectiva.

Clasificación	***Si***	***No***
Inyectiva		
Sobreyectiva		
Biyectiva		

Felicidades, ya usted tiene el conocimiento básico de la función parte entera

Ejercicios de mayor grado de dificultad

1) Pruebe
   a) $-1 \leq senx \leq 1$
   b) $-1 \leq cosx \leq 1$

2) Grafique las funciones:

   a) $f(x) = [\![x^2]\!]$

   b) $g(x) = [\![\ln x]\!]$

   c) $j(x) = [\![2^x]\!]$

3) Resuelva las ecuaciones:
   a) $[\![x]\!] + x = 6$

   b) $x - [\![x]\!] = \sqrt{2} - 1$

4) Calcule $[\![x]\!] + [\![-x]\!]$

5) Determine el criterio de la recta asintótica de la función parte entera

Respuestas de los ejercicios

1.1

i) 5 ii) -6 iii) 10 iv) 15 v) 5 vi) -3 vii) 3 viii) -2 ix) -1 x) -1 xi) 0
xii) -243 xiii) -1 xiv) 2 xv) 15 xvi) 2 xvii) 0 xviii) -4

1.2

a) $\sqrt{5} < \sqrt{10}$ b) $\frac{5}{4} > \frac{3}{8}$ c) $e^2 > 2\pi$ d) $\sqrt[3]{9} < \sqrt{9}$

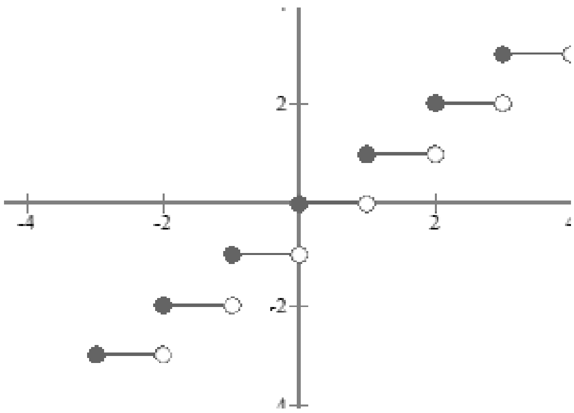
e) $(-\sqrt[2]{80}) < (-\sqrt[3]{60})$ f) $cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ g) $(-\frac{1}{2}) > (-\frac{5}{4})$

h) $\log_2 5 > \ln 4$ i) $\log 1 > \log \frac{1}{10}$ j) $2^5 > 3^3$

1.3

Dominio: $\mathbb{R}$
Ámbito: $\mathbb{Z}$
Tabla de valores gráfica

x	$[\![x]\!]$
$-5 \leq x < -4$	-5
$-4 \leq x < -3$	-4
$-3 \leq x < -2$	-3
$-2 \leq x < -1$	-2
$-1 \leq x < 0$	-1
$0 \leq x < 1$	0
$1 \leq x < 2$	1
$2 \leq x < 3$	2
$3 \leq x < 4$	3
$4 \leq x < 5$	4
$5 \leq x < 6$	5



a) Intersección con el eje de las abscisas: $(0,0)$
b) Intersección con el eje de las ordenadas: $(0,0)$
c) Indique tres preimágenes de 2: 2,1 2,5 2,9
d) Indique tres preimágenes de -1: -0,1 -0,11 -0,99
e) ¿Existen preimágenes de $\sqrt{2}$? No porque las imágenes son enteras y $\sqrt{2}$ no es entero, por lo que no puede tener preimágenes.
f) 3 como cualquier otro entero tiene infinitas preimágenes eso porque entre dos enteros hay infinitos números reales, propiedad de densidad de los números reales.

Clasificación	***Si***	***No***
Inyectiva		X
Sobreyectiva	X	
Biyectiva		X